

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۳ می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ است، پس عبارت خواسته شده $f'(4)$ است.

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) + 2(3)}{(-3)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

۲ گزینه ۳ می‌دانیم $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ است، پس عبارت خواسته شده $f'(\frac{1}{4})$ است.

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x} \Rightarrow f'(\frac{1}{4}) = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

۳ گزینه ۲ برای حل این سؤال از مشتق حاصل ضرب استفاده می‌کنیم. $((uv))' = u'v + v'u$

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1 \left(\frac{3(x+2) - 1(3x+1)}{(x+2)^2} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^2}} x = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{5x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(-3) = \sqrt[3]{8} + \frac{5}{3 \sqrt[3]{64}}(-3) = 2 - \frac{15}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۴ گزینه ۳ ابتدا شیب پاره خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به دست می‌آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 3 \end{array} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-5 - 3}{0 - 8} = \frac{-8}{-8} = 1 \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = 1$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y' = \frac{4(x+1) - 1(4x-5)}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1=3 \Rightarrow x=2 \xrightarrow{\text{تابع}} y=1 \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \\ x+1=-3 \Rightarrow x=-4 \text{ (در بازه نیست.)} \end{array} \right.$$

اکنون باید معادله خط مماس را در نقطه C و با شیب یک بنویسیم.

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

عرض از مبدأ این خط برابر ۱- است.

۵ گزینه ۴

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^3 - 3(x^2 - x)^2(2x - 1)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$\rightarrow f'(2) = \frac{(6)(8) - 3(4)(3)(8)}{64} = \frac{48 - 288}{64} = \frac{-240}{64} = \frac{-15}{4}$$

۶ گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \left(\frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^2} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{2x - x^2}{3x + 5}}}$$

$$\rightarrow f'(-2) = \frac{2 \left(\frac{(6)(-1) - 3(-8)}{1} \right)}{3 \sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}} = \frac{2(18)}{6} = 6$$

۷ گزینه ۲

$$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3}$$

حد خواسته شده را به صورت تعریف مشتق می نویسیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5 - h) - 3f(5 - h) + 2}{h(5 - h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(5 - h) - 1)(f(5 - h) - 2)}{h(5 - h)}$$

چون $f(5) = 1 \times \sqrt[3]{8} = 2$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - h) - 1}{5 - h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - h) - 2}{h} = \frac{f(5 - h) - 2}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - h) - 2}{h}$$

$$= \frac{2 - 1}{5} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + (-h)) - f(5)}{h} = -\frac{1}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 + (-h)) - f(5)}{-h}$$

با فرض $-h = t$ داریم:

$$-\frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(5 + t) - f(5)}{t} = -\frac{1}{5} f'(5)$$

$$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x + 3} + \frac{x - 4}{3\sqrt[3]{(x + 3)^2}}$$

$$f'(5) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = 2 + \frac{1}{3 \times 4} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$-\frac{1}{5} f'(5) = -\frac{1}{5} \times \frac{25}{12} = -\frac{5}{12}$$

۸ گزینه ۲ با فاکتور گرفتن ۲ از صورت کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(f(x) - \frac{1}{2})}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1}$$

در تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ ، توجه کنید که $f(1) = \frac{1}{2}$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

حال مشتق f در $x = 1$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)x\sqrt{x}}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1 + \frac{1}{2})(2 + 1 - 1) - (2 + 1) \times 1}{(2 + 1 - 1)^2} = \frac{\frac{3}{2} \times 2 - 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

۹ گزینه ۴ طبق فرض، شیب خط مماس در نقطه $(-1, 5)$ از تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} f(-1) = 5 \\ f'(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

مشتق تابع g به صورت زیر می‌شود:

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1) = \frac{1}{3} f(-1) - f'(-1) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

۱۰ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ [\frac{x}{4}](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع، برای محاسبه $f'(2)$ از ضابطه بالایی و برای محاسبه $f'(5)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{4 + 6}{2 \times 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

برای مشتق تابع در $x = 5$ باید از ضابطه پایینی استفاده کنیم:

$$f(x) = [\frac{x}{4}](x^2 - 9x)$$

ابتدا باید براکت را در $x = 5$ تعیین عدد کنیم و سپس مشتق بگیریم:

$$x = 5 : f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۱۱ گزینه ۱ توجه کنید که وقتی $4 \leq x < 8$ است آن‌گاه $\frac{x}{4} < 2$ و $1 \leq \frac{x}{4}$ بوده و $[\frac{x}{4}] = 1$ می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & 0 \leq x < 4 \\ x^2 - 9x & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

برای محاسبه $f'(2)$ سراغ ضابطه بالا و برای محاسبه $f'(5)$ سراغ ضابطه پایین می‌رویم.

$$f'(2) = \frac{1(2x+6)}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{4+6}{2\sqrt{4+12}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$f'(5) = 2x - 9 = 10 - 9 = 1$$

$$\text{پس: } f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۱۲ گزینه ۲ طبق فرض تابع f در $\mathbb{R} - \{a\}$ تعریف شده و برای هر $x \neq a$ پیوسته است، پس باید مخرج دارای فقط یک ریشه بوده و ریشه آن باید $x = a$ باشد؛ اما چون طبق فرض $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود است، یعنی باید $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برای عددی مشخص شود. در این صورت با توجه به اینکه ریشه صورت $x = -1$ است، باید تک ریشه مخرج نیز برابر $x = -1$ باشد؛ پس داریم:

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3 + (m-2)x + 1|}$$

$x = -1$ ریشه مخرج است، پس $m = 2$ و بنابراین داریم:

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3 + (m-2)x + 1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2 - x + 1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۳ گزینه ۳

$$۱) x = 4 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 8 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 4 \\ 8 \end{vmatrix}$$

$$۲) y' = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{x} \xrightarrow{x=4} m_{\text{مماس}} = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$۳) y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۱۴ گزینه ۴ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند، آن گاه $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ است.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x-1} \\ g(x) = ax^2 + bx \end{cases} \rightarrow f(2) = g(2) \rightarrow 4 = 4a + 2b \quad (I)$$

$$f'(2) = g'(2) \rightarrow \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = 2ax + b \rightarrow -3 = 4a + b \quad (II)$$

از حل دستگاه $a = \frac{-5}{2}$ و $b = 7$ به دست می آید.

۱۵ گزینه ۴ چون در $x = 4$ مماس مشترک دارند پس در این نقطه هم مقادیرشان با هم برابر است و هم مشتق این دو تابع در $x = 4$ با هم برابر هستند.

$$y_1 = f(x) = x\sqrt{x} \quad , \quad y_2 = g(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(4) = 4 \times \sqrt{4} = 8 \Rightarrow g(4) = 16 + 4a + b \Rightarrow \boxed{4a + b = -8} \quad (1)$$

$$f'(4) = g'(4) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = 3$$

$$g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow a = -5 \xrightarrow{(1)} \boxed{b = 12}$$

۱۶ گزینه ۴ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند آن گاه $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ است. دو تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ داده شده است.

$$f(4) = g(4) \rightarrow 8 = 16 + 4a + b \rightarrow 4a + b = -8$$

$$f'(4) = g'(4) \rightarrow \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}4 = 2x + a \rightarrow 2 + 1 = 8 + a \rightarrow a = -5 \xrightarrow{4a+b=-8} -20 + b = -8 \rightarrow b = 12$$

۱۷ گزینه ۱ ابتدا ضابطه وارون تابع داده شده را به دست می آوریم.

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \sqrt{x}y - \sqrt{x} = y + 1 \rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$$

اکنون از تابع معکوس، مشتق گرفته و به جای x عدد ۲ را قرار می دهیم.

$$\text{مشتق} = 2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)' \left(\frac{1(x - 1) - 1(x + 1)}{(x - 1)^2}\right) \rightarrow m_{\text{مماس}} = 2(3)(-2) = -12$$

۱۸ گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی است؛ پس وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می کند:

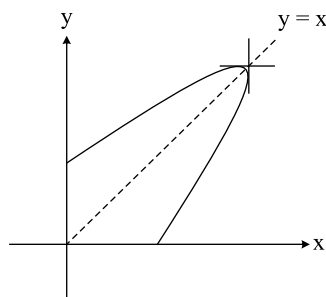
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} + 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

پس نقطه تلاقی $(4, 4)$ است. شیب خط مماس بر منحنی f در $x = 4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

ضابطه تابع وارون را می یابیم:

$$f(x) = y = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y - 2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = 2(x - 2) \Rightarrow (f^{-1})'(4) = 4$$



پس شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطه $(4, 4)$ برابر ۴ است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور x هاست. اگر زاویه بین این دو مماس و محور x را به ترتیب α_1 و α_2 و زاویه بین این دو مماس را α بنامیم، داریم:

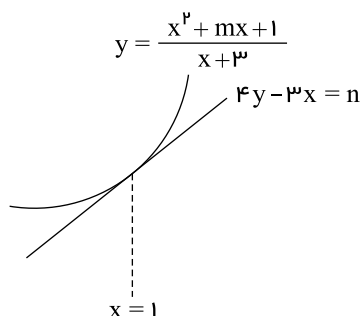
$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow \tan \alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4 \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{15}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

بنابراین:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{15}{8}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{240}{289}$$

۱۹ گزینه ۴

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$$

$$4y - 3x = n$$

$$4y = 3x + n \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{3}{4}$$

شیب خط مماس در $x = 1$ برابر $\frac{3}{4}$ است، پس:

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(2x + m)(x + 3) - 1 \times (x^2 + mx + 1)}{(x + 3)^2}$$

$$y'(1) = \frac{(2 + m) \times 4 - (1 + m + 1)}{4^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(m + 2) - 2 - m = 12$$

$$\Rightarrow 4m + 8 - 2 - m = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1 + 2 + 1}{1 + 3} = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

نقطه $A(1, 1)$ بر روی خط $4y - 3x = n$ نیز قرار دارد.

$$4 \times 1 - 3 \times 1 = n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

۲۰ گزینه ۳ خط $y = 2x + b$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بر تابع $y = \frac{x+a}{ax+1}$ مماسی است، پس خط مماس یعنی مشتق د $x = 1$ برابر ۲ است.

$$y' = \frac{1 \times (ax+1) - a(ax+1)}{(ax+1)^2} = \frac{ax+1-ax-a^2}{(ax+1)^2} = \frac{1-a^2}{(ax+1)^2}$$

$$y'(1) = \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow 2(a^2+2a+1) = 1-a^2$$

$$2a^2+4a+2-1+a^2=0 \Rightarrow 3a^2+4a+1=0 \Rightarrow (a+1)(3a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

به ازای $a = -1$ تابع $y = \frac{x-1}{-x+1} = -1$ تابع ثابت است و خط $y = 2x + b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود، پس $a = -\frac{1}{3}$ قابل قبول است و

داریم:

$$y = \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x+1} = \frac{3x-1}{-x+3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{3-1}{-1+3} = 1$$

نقطه $A(1, 1)$ بر روی خط $y = 2x + b$ نیز قرار دارد.

$$1 = 2 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

۲۱ گزینه ۳ شیب خط $6y - 3x = 1$ را می‌یابیم:

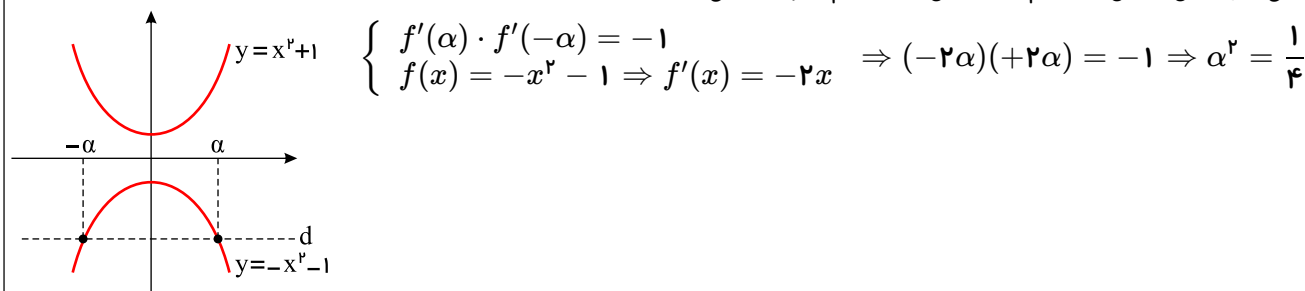
$$6y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{6}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2}$$

$$-2 = \text{شیب خط مماس}$$

بنابراین در تابع $y = x^2 - 4x + 5$ باید نقطه‌ای را بیابیم که شیب خط مماس یعنی مشتق در آن برابر -2 باشد.

$$y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

۲۲ گزینه ۱ مطابق شکل، ضابطه قرینه سهمی نسبت به محور x ها برابر می‌شود با: $y = -x^2 - 1$ خط افقی d ، نمودار تابع را در نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند؛ از طرفی طبق فرض، مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند، یعنی:



عرض نقاط مورد نظر (نقاط به طول α و $-\alpha$) برابر می‌شود با:

$$f(\alpha) = f(-\alpha) = -\alpha^2 - 1 = \frac{-1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

یعنی معادله خط d به صورت $y = \frac{-5}{4}$ است و مبدأ مختصات به فاصله $1,25$ از خط d است.

۲۳ گزینه ۳ توجه: خط مماس بر منحنی در نقطه عطف از منحنی عبور می‌کند.

$$y = x^3 + ax^2 + bx - 1$$

$$y' = 3x^2 + 2ax$$

$$y'' = 6x + 2a = 0 \rightarrow 6x = -2a \rightarrow x = \frac{-2a}{6} = -\frac{a}{3}$$

نقطه $(-1, -4)$ نقطه عطف نمودار تابع است، پس:

$$-\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$y = x^3 + ax^2 + bx - 1 \xrightarrow{x=-1, y=-4} -4 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 \Rightarrow b = 5$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = 0.6$$

۲۴ گزینه ۲ هرگاه دو نمودار برهم مماس باشند آنگاه معادله تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد.

توجه: هرگاه یک معادله درجه دوم ریشه مضاعف داشته باشد. آنگاه $\Delta = 0$ است و آن معادله را می توان به صورت مربع کامل نوشت.

خط و منحنی را با هم تلاقی و ریشه مضاعف از آن می گیریم:

$$\begin{cases} y = \frac{x+5}{7} \\ y = \frac{ax-1}{3x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+5}{7} = \frac{ax-1}{3x+1} \Rightarrow 3x^2 + 16x + 5 = 7ax - 7 \Rightarrow 3x^2 + (16-7a)x + 12 = 0 \quad (1)$$

معادله (۱) چون ریشه مضاعف دارد را می توان به صورت مربع کامل نوشت بنابراین چون محل تلاقی ناحیه اول است، معادله فوق به صورت $3(x-2)^2$ است پس:

$$\Rightarrow 16-7a = -12 \Rightarrow 7a = 28 \Rightarrow a = 4$$

۲۵ گزینه ۱ ابتدا معادله خطی که از دو نقطه $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می گذرد را به عنوان معادله خط مماس می نویسیم:

$$m_{\text{شیب}} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$y-1 = \frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

حال اگر معادله خط مماس را با معادله منحنی قطع دهیم باید تقاطع آنها دارای ریشه مضاعف باشد پس داریم:

$$\sqrt{ax-1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt{ax-1} = x+4 \Rightarrow$$

$$9(ax-1) = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 + (8-9a)x + 25 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 - 4(25) = 0 \Rightarrow (8-9a)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-9a = 10 \Rightarrow a = \frac{-2}{9} \\ 8-9a = -10 \Rightarrow a = \frac{18}{9} = 2 \end{cases}$$

اگر $a = \frac{-2}{9}$ باشد $f(5)$ تعریف نشده است پس به ازای $a = 2$ خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

۲۶ گزینه ۱

$$A = (-\frac{5}{2}, -12), B = (2, 5, 6) \Rightarrow m_{AB} = 6, y = 6x - 9$$

$$f'(x) = \frac{-2a}{(2x-1)^2} = 6, f(x) = \frac{a}{2x-1} = 6x - 9$$

$$\begin{cases} a = -3(2x-1)^2 \\ a = (2x-1)(6x-9) \end{cases} \Rightarrow -3(2x-1) = 6x-9 \Rightarrow -6x+3 = 6x-9 \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(5) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

۲۷ گزینه ۴ چون از خط مماس بر منحنی، دو نقطه را در اختیار داریم، اگر شیب خط مماس را محاسبه کنیم همان مقدار مشتق تابع f در نقطه $x = 3$ است؛ پس داریم:

$$A(0, 1) \quad B(3, 5) \Rightarrow m_{AB} = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(3) = \frac{4}{3}$$

۲۸ گزینه ۱ برای اینکه تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس باشد، باید $f(2) = 0$ و $f'(2) = 0$ شود؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 + ax - b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \Rightarrow 8 + 2a - b = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12 \end{cases} \Rightarrow b = -16$$

$$\Rightarrow b - a = -4$$

۲۹ گزینه ۳ با استفاده از معادله خط مماس در $x = 4$ داریم:

$$\text{فرض : } f'(4) = -a \quad f(4) = 2 - 4a$$

$$f(4) + f'(4) = -1 \Rightarrow 2 - 4a - a = -1 \Rightarrow 5a = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{5} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{5}$$

۳۰ گزینه ۲ معادله خط d به صورت $y = mx$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3) = mx \Rightarrow 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = mx & (1) \\ f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = m & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = (20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}})x$$

$$8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} = 20x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 12x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x}(4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

مقادیر $x = 0$ و $x = -\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول هستند، زیرا به ازای $x = 0$ شیب خط m موجود نیست و $x = -\frac{1}{2}$ نیز در دامنه نمی‌گنجد. پس $x = \frac{1}{2}$ قابل قبول است.

$$(2) \Rightarrow m = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 20 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

۳۱ گزینه ۲ با توجه به فرض داریم:

$$f(3) = -3a - 5, f'(3) = -a$$

$$\frac{f'(3)-f(3)=2}{-a+3a+5=2} \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(3) = -3 \times \frac{-3}{2} - 5 = -\frac{1}{2} \\ f'(3) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(3)}{f'(3)} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$$

۳۲ گزینه ۳ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد؛ بنابراین معادله d به صورت $y = ax$ است.

$$f(x) = \frac{t}{-2t^4 + t^2 + 1}, t = \sqrt{x} \text{ قرار می‌دهیم؛ بنابراین داریم:}$$

از آنجا که d و f در نقطه A مماس هستند، شیب آنها در این نقطه برابر است.

همچنین عرض آنها در A یکسان است.

$$\frac{t}{-2t^4 + t^2 + 1} = at^2 \Rightarrow -2at^5 + at^3 + at - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری از طرفین تساوی}} -10at^4 + 3at^2 + a = 0 \Rightarrow -a(10t^4 - 3t^2 - 1) = 0 \xrightarrow{\Delta=9+40=49}$$

$$\begin{cases} t^2 = \frac{3+7}{10} = \frac{1}{2} \checkmark \\ \text{یا} \\ t^2 = \frac{3-7}{10} = \frac{-1}{5} \text{ غلط} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳۳ گزینه ۱ می‌دانیم $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(2) = 6 \rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6$$

$$\text{توجه کنید: } \begin{cases} g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g(2) = \frac{4+1}{2-1} = 5 \\ g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+1)}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = -3 \end{cases}$$

$$g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \rightarrow -3f'(5) = 6 \rightarrow f'(5) = -2$$

۳۴ گزینه ۳ می‌دانیم که $(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ است.

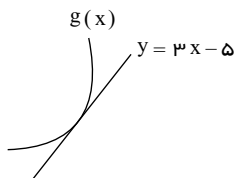
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$(fog)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 + 1 = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{3}{2} \times f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۳۵ گزینه ۴

می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ و $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$ است.



$$\Rightarrow g(2) = 1, \text{ شیب خط مماس} = 3 \Rightarrow g'(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 3 f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۳۶

گزینه ۴ می‌دانیم: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ ، پس ابتدا $g(\frac{3}{\sqrt{2}})$ را حساب می‌کنیم:

$$g(\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} - 1}} = 2 \Rightarrow (f \circ g)'(\frac{3}{\sqrt{2}}) = g'(\frac{3}{\sqrt{2}}) \cdot f'(2) \quad (*)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{2}}}{3\sqrt[3]{(\frac{1}{2})^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

حال برای محاسبه $f'(2)$ ، در یک همسایگی $x = 2$ ضابطه f به صورت زیر است و داریم:

$$f(x) = (4x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f'(2) = 16$$

$$\xrightarrow{(*)} (f \circ g)'(\frac{3}{\sqrt{2}}) = -8\sqrt{2} \times 16 = -128\sqrt{2} \times 4$$

۳۷ گزینه ۴ می‌دانیم:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

ابتدا از تابع $g(x)$ در نقطه $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ مشتق می‌گیریم. دقت کنید تابع در این نقطه پیوسته و مشتق پذیر است.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \Rightarrow g'(\frac{\sqrt{5}}{2}) = -\frac{1}{2} \times (\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

در قدم بعدی $g(x)$ را به ازای $x \rightarrow (\frac{\sqrt{5}}{2})^-$ محاسبه می‌کنیم.

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^-} = 2^+$$

پس باید از تابع f به ازای $x \rightarrow 2^+$ مشتق بگیریم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [2^+] = 2 \Rightarrow f(x) = (2x)^3 = 8x^3 \Rightarrow f'(x) = 24x^2 \Rightarrow f'(2^+) = 24 \times 4$$

در نتیجه مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ به صورت زیر می شود:

$$f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2}^-)) \times g'(\frac{\sqrt{5}}{2}^-) = 24 \times 4 \times (-4\sqrt{5}) = 8(-48\sqrt{5})$$

۳۸ گزینه ۳ هر کدام از توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل می دهیم:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & ; & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2 & ; & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1 & ; & 1 - x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & ; & x^2 > 2 \\ 1 - x^2 & ; & x^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x)' = \begin{cases} 0 & x^2 > 2 \\ -2x & x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \text{این تابع در نقاط مرزی } \{\pm\sqrt{2}\} \text{ مشتق ناپذیر است.}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < -1 \\ 1 - x^2 & ; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; & x > 1 \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)(x)' = \begin{cases} -2x & ; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط مشتق ناپذیر} = \{-1, 1\}$$

در مجموع ۴ نقطه مشتق ناپذیر در دو تابع وجود دارد.

۳۹ گزینه ۳ چون f متناوب با دوره متناوب ۵ است، پس مشتق f نیز متناوب با دوره متناسب ۵ است، زیرا:

$$f(x + 5) = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 \times f'(x + 5) = f'(x) \Rightarrow f'(x + 5) = f'(x)$$

حال مشتق تابع f را به دست می آوریم:

$$g(x) = f(x + 1) + f(3x + 10) \rightarrow g'(x) = f'(x + 1) + 3f'(3x + 10)$$

$$g'(-2) = f'(-2 + 1) + 3f'(-6 + 10) = f'(-1) + 3f'(4) \quad (1)$$

f' متناوب با دوره تناوب ۵ است، پس:

$$f'(4) = f'(4 - 5) = f'(-1) \xrightarrow{(1)} g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

۴۰ گزینه ۳

$$(f \circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ g(x) = \frac{1}{2x^2} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^2}}} = x \Rightarrow (f \circ g)' = (x)' = 1$$

۴۱ گزینه ۳

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (f \circ g)'(x)$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^5}, \quad x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}; \xrightarrow{x>0} (f \circ g)(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} \Rightarrow (f \circ g)(x) = -x$$

$$(f \circ g)'(x) = -1 \Rightarrow (f \circ g)'(\sqrt[5]{3}) = -1$$

۴۲ گزینه ۱ برای محاسبه طول نقاط max و min نسبی یک تابع پیوسته، ابتدا نقاط بحرانی را می‌یابیم و سپس مشتق تابع را در نقاط بحرانی تعیین علامت می‌کنیم در هر نقطه‌ای که علامت مشتق تابع از مثبت به منفی عوض شود آن نقطه طول max نسبی و اگر از منفی به مثبت عوض شود آن نقطه طول min نسبی است و برای محاسبه مقدار max و min نسبی، باید طول max یا min نسبی را در تابع اصلی قرار دهیم.

$$y = x^3 - 12x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x		-2		+2	
y'	+	○	-	+	
		↘		↗	

max

$$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$$

۴۳ گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = -4 + 2a + b \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

پس $-4 + 2a + b = 1$ و در نتیجه $2a + b = 5$ است.

$$f'(2^+) = f'(2^-): \frac{-1}{(x-1)^2} = -2x + a \xrightarrow{x=2} -1 = -4 + a \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{2a+b=5} 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

۴۴ گزینه ۱ ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه مرزی $x = 2$ بررسی می‌کنیم و نیز می‌دانیم به ازای $x < 2$ داریم: پس:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \Rightarrow f(2^-) = 4 - 4 = 0 \\ x > 2 \Rightarrow f(2^+) = 2 + 2a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{2a + b = -2} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -2 \\ f'_+(2) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4 \xrightarrow{(1)} \boxed{b = 6}$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = 2$$

۴۵ گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax+b} = \frac{\lambda}{2a+b} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -\lambda + 12 = 4 \\ f(2) = -\lambda + 12 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(2^+) = f'(2^-): \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} = -2x^2 + 6 \xrightarrow{x=2} \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = -12 + 6$$

$$\xrightarrow{2a+b=2} \frac{-\lambda a}{4} = -6 \Rightarrow -\lambda a = -24 \Rightarrow a = 3, b = -4$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{گزینه ۱ به ازای } x < 2 \text{ داخل قدر مطلق منفی است، پس:}$$

شرط مشتق پذیر بودن تابع f در $x = a$ آن است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$x = 2 \text{ در پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\frac{1}{2}x^2 + ax + b) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - x^2) = 4 - 4 = 0 \\ f(2) = 2 + 2a + b \end{cases} \rightarrow 2 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -2$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow x + a = 2 - 2x \rightarrow 2 + a = 2 - 4 \rightarrow a = -4, b = 6$$

پس $a + b = 2$ است.

۴۷ گزینه ۳ شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ آن در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$x \text{ پیوستگی} = -2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-\frac{1}{2}x^2 + bx + c) = -2 - 2b + c \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \\ f(-2) = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \end{cases} \Rightarrow -2 - 2b + c = 3$$

$$f'((-2)^+) = f'((-2)^-) \rightarrow -x + b = \frac{1(-2)}{2\sqrt{5-2x}} \rightarrow 2 + b = \frac{-2}{6} \rightarrow 12 + 6b = -2$$

$$\rightarrow 6b = -14 \rightarrow b = \frac{-7}{3} \xrightarrow{-2b+c=5} \frac{14}{3} + c = 5 \rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۴۸ گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c = 2ak + b \\ (2) \text{ شرط مشتق پذیری: } 2ak + b = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2a$$

$$\xrightarrow[c=a-b]{b=2a-2ak} ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2a$$

$$\Rightarrow ak^2 + 2ak - 2ak^2 + a - 2a + 2ak = 2a \Rightarrow -ak^2 + 4ak - 2a = 0 \xrightarrow{\div(-a)} k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = 3(\max) \end{cases}$$

۴۹ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط مشتق پذیر بودن تابع f در $x = a$ آن است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a + 10 + b \\ f(2) = 4a + 10 + b \end{cases} \rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \rightarrow b = -5$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow 2a = 2ax + 5 \rightarrow 2a = 4a + 5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{5}{2} - 5 = -\frac{15}{2} \text{ است.}$$

۵۰ گزینه ۱ چون تابع f در نقطه $x = a$ نیز مشتق پذیر است، پس باید در این نقطه پیوسته باشد و مشتق های چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2ba + c \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow 2ba + c = 3a^2 \Rightarrow c = 3a^2 - 2ba \quad (I)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ 6x & x \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(a) = 2b \\ f'_-(a) = 6a \end{cases} \Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a \xrightarrow{(I)} c = 3a^2 - 2(3a)a = -3a^2$$

$$\Rightarrow a^3 + b - c = a^3 + 3a + 3a^2 = (a + 1)^3 - 1$$

۵۱ گزینه ۲

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

ریشه های ساده قدر مطلق نقاط مشتق ناپذیر است، پس داریم:

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق} \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع در دو نقطه $x = \pm\sqrt{2}$ مشتق ناپذیر است.

۵۲ گزینه ۲ تابع داده شده $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{1} - 1)}{3} = \frac{\frac{3}{16} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$x = 2 \text{ در } \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(2) \Rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{اختلاف این دو } \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ است.}$$

۵۳ گزینه ۴

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4} = 4.75$$

$$\text{پس } 5 - 4.75 = 0.25 \text{ است.}$$

۵۴ گزینه ۲

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 + 1 = 2 \\ f(4) = 3 + \frac{1}{5} = 3.2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر متوسط تابع در } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{3.2 - 2}{4} = \frac{1.2}{4} = 0.3$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق است:

$$f'(x) = \frac{1(2)}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3+1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}+1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$\text{بنابراین تفاضل آن‌ها برابر } 0.34 - 0.3 = 0.04 \text{ است.}$$

۵۵ گزینه ۴

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [5, 6] = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21-36+24} - \sqrt{21-25+20}}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = y' = \frac{1(-2x+4)}{2\sqrt{21-x^2+4x}} = \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری}} \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}} = -1 \Rightarrow -x+2 = -\sqrt{21-x^2+4x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2+4-4x = 21-x^2+4x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{اما } x = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ در معادله صدق می‌کند.}$$

۵۶ گزینه ۱ آهنگ تغییر متوسط دو تابع داده شده در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ را می یابیم.

$$y = \sin x \cos 2x \Rightarrow \frac{y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \pi - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1 \times (-1) - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 (\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\frac{y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-(-1) + 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = -1$$

۵۷ گزینه ۳

$$[-1, 0] \Rightarrow \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (\lambda(1-a))}{1} = \lambda a - 1 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{\lambda}$$

آهنگ لحظه ای تغییر در $x = 1$ برای تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3 \left(-\frac{x}{2} + 1\right)$ مورد نظر است:

$$f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2 \left(-\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^3$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} - 4 = 12 - 4 = 8$$

۵۸ گزینه ۲

بازه مورد نظر: $[1, 3]$ و $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\left(1 - \frac{a}{3}\right) - \left(1 - a\right)}{2} = \frac{\frac{2a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای: } f'(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \xrightarrow{\text{با توجه به بازه داده شده}} x = \sqrt{3}$$

۵۹ گزینه ۳ برای محاسبه اکستریم های مطلق یک تابع، عرض های نقاط بحرانی را با مقادیر تابع در دو سر دامنه مقایسه می کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, +\infty) - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x-1)^2 - 2(x-1) \cdot (x^2+2x)}{(x-1)^4} = 0$$

$$2(x-1) \left((x+1) \cdot (x-1) - (x^2+2x) \right) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin D_f$$

$$(x^2 - 1 - x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ طول نقطه بحرانی}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

عدد $-\frac{1}{3}$ -مینیمم مطلق تابع است که در $x = -\frac{1}{2}$ قرار دارد و خط قائم $x = 1$ مجانب قائم است چون ریشهٔ مخرج است اما ریشهٔ صورت نیست.

$$\text{فاصله} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

۶۰ گزینه ۲ نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6} \text{ (بحرانی)}$$

دامنهٔ تابع هم به صورت $\frac{a}{2} \geq x \geq 0$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{a} \\ f\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{\frac{a}{6}} \text{ (min)} \\ f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \text{ (max)} \end{cases}$$

$$\text{طبق فرض: } \sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} = \sqrt{12} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{12}}a = \sqrt{12} \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4$$

۶۱ گزینه ۱ با توجه به بازهٔ $[0, a]$ داریم: $|x - a| = a - x$ و بنابراین داریم:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(a-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(a-x) - \sqrt[3]{x^2}$$

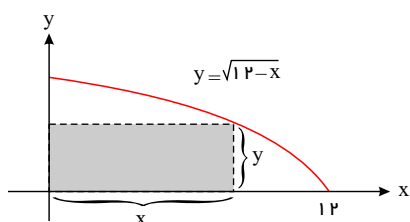
$$f'(x) = \frac{2a - 2x - 3x}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 2a - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

مینیمم مطلق $f(0) = f(a) = 0$

$$f\left(\frac{2a}{5}\right) = 1,5 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}\left(\frac{3a}{5}\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4a^2}{25} \times \frac{a^3}{125} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow a^5 = \frac{5^5}{2^5} \Rightarrow a^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۶۲ گزینه ۳



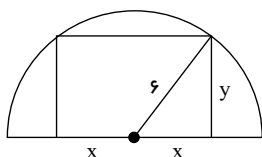
$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{12 - x} \xrightarrow{S'=0} \sqrt{12 - x} + \frac{-1}{2\sqrt{12 - x}}x = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{12 - x} = \frac{x}{2\sqrt{12 - x}} \rightarrow 2(12 - x) = x \rightarrow 24 - 2x = x$$

$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8 \rightarrow S_{Max} = 8\sqrt{12 - 8} = 8 \times 2 = 16$$

۶۳ گزینه ۴ روش اول:

مطابق شکل، معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۶ را نوشته و با اعمال شرط $y \geq 0$ معادله نیم‌دایره تبدیل می‌کنیم. طبق شکل x برابر با صفر طول مستطیل است.



$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 36 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{36 - x^2} \quad (1)$$

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2xy \xrightarrow{(1)} S(x) = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2}$$

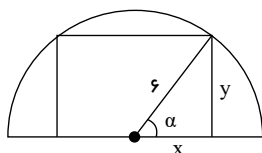
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{1(-2x)}{2\sqrt{36 - x^2}}(2x) = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \rightarrow 36 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 36$$

$$\rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = 3\sqrt{2}, y = 3\sqrt{2} \rightarrow S_{Max} = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36$$

روش دوم:

مطابق شکل زیر، از نسبت‌های مثلثاتی زاویه α استفاده می‌کنیم:

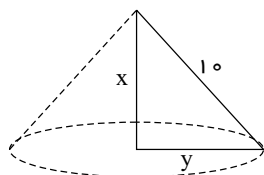


$$\sin \alpha = \frac{y}{6} \rightarrow y = 6 \sin \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{6} \rightarrow x = 6 \cos \alpha$$

$$S = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 72 \sin \alpha \cos \alpha = 72 \left(\frac{1}{2}\right) \sin 2\alpha = 36 \sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد، پس $S_{Max} = 36$ است.

۶۴ گزینه ۴ اگر مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش دوران کند شکل حاصل، مخروط است.



دو متغیره: x (ارتفاع) (مساحت قاعده) $= \frac{1}{3} \pi y^2 x = V$ مخروط

از طرفی: $x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$

یک متغیره: $V = \frac{1}{3} \pi x (100 - x^2) = \frac{100\pi}{3} x - \frac{1}{3} \pi x^3$

مشتق: $\frac{100\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \rightarrow \pi x^2 = \frac{100\pi}{3} \rightarrow x^2 = \frac{100}{3} \rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \xrightarrow{y^2=100-x^2} y^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$

$\rightarrow y = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

بنابراین: $\frac{x}{y} = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$

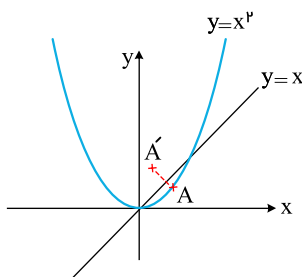
گزینه ۱ نقطه B را روی منحنی در نظر می گیریم.

$A \left(\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right), \left| \frac{x}{\sqrt{2x+7}} \rightarrow AB = \sqrt{(5-x)^2 + (0-\sqrt{2x+7})^2} = \sqrt{25+x^2-10x+2x+7} \right.$

$= \sqrt{x^2-8x+32} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0$

$\rightarrow x=4 \rightarrow \text{فاصله } Min = \sqrt{16-32+32} = 4$

گزینه ۳ ۶۶



نقطه A روی سهمی است، پس مختصات آن به صورت $A(\alpha, \alpha^2)$ خواهد بود. همچنین نقطه A' قرینه A نسبت به خط

$y=x$ است، پس $A'(\alpha^2, \alpha)$ فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:

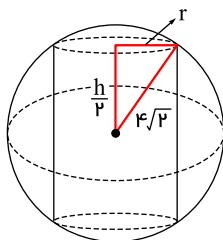
$|AA'| = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2} = d$

$\xrightarrow{d} d' = \frac{4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha}{2\sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2}} \xrightarrow{d'=0} 4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha = 0$

$$\Rightarrow 4\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{بین دو نقطه تقاطع}} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d = |AA'| = \sqrt{2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶۷ گزینه ۲ مطابق شکل روبه‌رو، استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع را محاط در کره‌ای به شعاع $4\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم.



$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h$$

مساحت جانبی را بر حسب h می‌نویسیم و نقاط بحرانی تابع $S(h)$ را به دست می‌آوریم. طبق فیثاغورس داریم:

$$(4\sqrt{2})^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 32 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

پس:

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi \times \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} \times h$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \times \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}} \Rightarrow S' = 2\pi \times \frac{64h - h^3}{2\sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}}$$

$$\xrightarrow{S'=0} 64h - h^3 = 0 \xrightarrow{h>0} \begin{cases} h = 0 \text{ ق.ق.} \\ h = 8 \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{8^2}{4}} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$

۶۸ گزینه ۲ توجه کنید قرینه نقطه $A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $A' \begin{vmatrix} -y \\ -x \end{vmatrix}$ است. اکنون نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ -\sqrt[3]{\alpha} \end{vmatrix}$ را روی تابع f در نظر می‌گیریم. بنابراین قرینه آن نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $A' \begin{vmatrix} \sqrt[3]{\alpha} \\ -\alpha \end{vmatrix}$ است.

$$AA' = \sqrt{(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2 + (-\sqrt[3]{\alpha} + \alpha)^2} = \sqrt{(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2 + (\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2} = \sqrt{2(\alpha - \sqrt[3]{\alpha})^2} = \sqrt{2}|\alpha - \sqrt[3]{\alpha}|$$

$$\xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق منفی}} -\sqrt{2}(\alpha - \sqrt[3]{\alpha}) : \text{یک متغیره} \xrightarrow{\text{مشتق}} -\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}\right) = 0 \rightarrow \frac{3\sqrt[3]{\alpha^2} - 1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}} = 0$$

$$\rightarrow 3\sqrt[3]{\alpha^2} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt[3]{\alpha^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{27} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$AA' = -\sqrt{2}(\alpha - \sqrt[3]{\alpha}) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{(\sqrt{3})^3}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

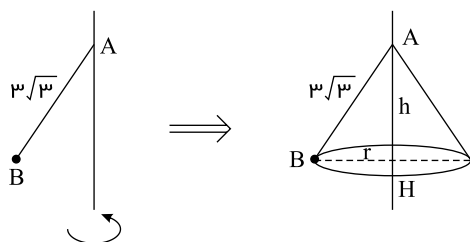
۶۹ گزینه ۳ نقطه $A \mid \begin{matrix} \alpha \\ 2\sqrt{\alpha} \end{matrix}$ را روی منحنی $y^2 = 4x$ در نظر می‌گیریم.

یک متغیره: $AM = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}$

مشتق $\rightarrow \frac{1(2\alpha - 2)}{2\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}} = 0 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow AA' = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۷۰ گزینه ۲

با توجه به شکل مقابل می‌خواهیم حجم مخروط بیشترین مقدار ممکن باشد. داریم:



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h(27 - h^2) = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

مشتق V بر حسب h را به دست می‌آوریم:

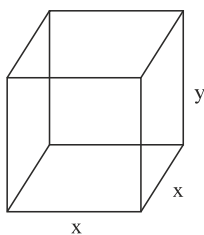
$$V' = \frac{\pi}{3}(27 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

$-c ccccch$		3
V'	$+$	0
V	$\nearrow$	$\searrow$

طبق جدول فوق به ازای $h = 3$ مقدار V ماکزیمم است.

۷۱ گزینه ۲

با توجه به شکل مقابل، مساحت کل مکعب در باز را بصورت تابعی بر حسب x می‌نویسیم.



حجم: $V = x^2 y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} \quad (1)$

$$S = 4xy + x^2 \xrightarrow{(1)} S = 4x \times \frac{4}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$S' = 2x + \frac{0 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 2 & \\ \hline S & - & 0 & + \\ \hline S & & \searrow & \nearrow \end{array}$$

طبق جدول فوق، به ازای $x = 2$ مقدار S مینیمم است.

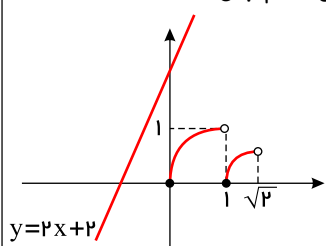
$$S_{\min} = 2^2 + \frac{16}{2} = 4 + 8 = 12$$

۷۲ گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$y = \sqrt{x - [x^2]} \rightarrow x - [x^2] \geq 0 \rightarrow x \geq [x^2]$$

$$\xrightarrow{\text{بازبینی}} \begin{cases} 0 \leq x < 1 \rightarrow x \geq 0 \checkmark \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \rightarrow x \geq 1 \checkmark \end{cases} \rightarrow D_y = [0, \sqrt{2}]$$

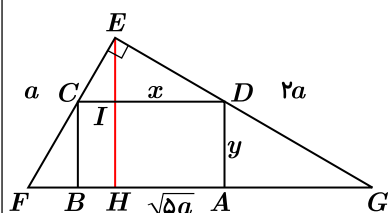
مطابق شکل، کمترین فاصله نقاط تابع، مربوط به نمودار سمت چپ است. پس $[x^2] = 0$ و نقطه را به صورت $P(x, \sqrt{x})$ می‌گیریم، پس:



$$\text{تابع فاصله} \quad h(x) = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مشتق}} h'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \min(h) = \frac{\left| 2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} + 2 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

۷۳ گزینه ۴



$$FG = \sqrt{4a^2 + a^2} \Rightarrow FG = \sqrt{5}a$$

$$EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{a \times 2a}{\sqrt{5}a} \Rightarrow EH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

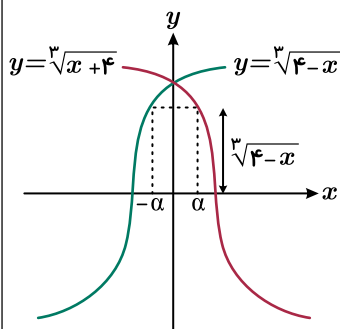
با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5}a} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{5}} - y}{\frac{2a}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{2a}{\sqrt{5}} - y \Rightarrow y = \frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{2x}{5} \quad (1)$$

$$S = xy \Rightarrow S = x \times \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{2x}{5} \right) = \frac{2ax}{\sqrt{5}} - \frac{2x^2}{5} \rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{4x}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}a \xrightarrow{(1)} b = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{a}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2,5$$

۷۴ گزینه ۴ در مسائل مربوط به بهینه‌سازی، ابتدا ضابطه عبارتی که باید بهینه شود را می‌نویسیم و ریشه یا ریشه‌های مشتق آن را محاسبه می‌کنیم و سپس ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی قرار می‌دهیم.



عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت: } S = 2\alpha \sqrt[3]{4-\alpha}$$

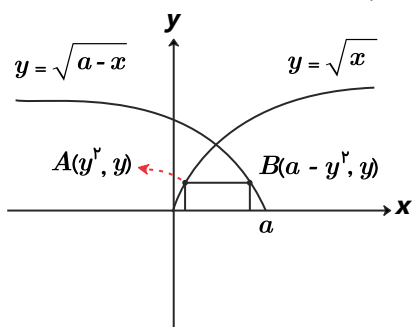
$$S' = 2\sqrt[3]{4-\alpha} - \frac{2\alpha}{3\sqrt[3]{(4-\alpha)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6(4-\alpha) - 2\alpha}{3\sqrt[3]{(4-\alpha)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{24 - 8\alpha}{3\sqrt[3]{(4-\alpha)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow S(3) = 2 \times 3 \sqrt[3]{4-3} = 6$$

۷۵ گزینه ۳

با توجه به شکل دو نقطه A و B دارای عرض مساوی هستند و بنابراین مختصات نقاط A و B به صورت زیر خواهند بود:



$$A(y^2, y) \quad B(a - y^2, y)$$

پس ابعاد مستطیل مطلوب به صورت $a - y^2$ و y خواهد بود که در این صورت مساحت آن برابر است با:

$$\text{مستطیل } S = y(a - y^2) \Rightarrow S = ay - y^3$$

$$S' = a - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$S_{max} = \sqrt{\frac{a}{3}} \left(a - \frac{a}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{3} \times \frac{4a^2}{9} = 2$$

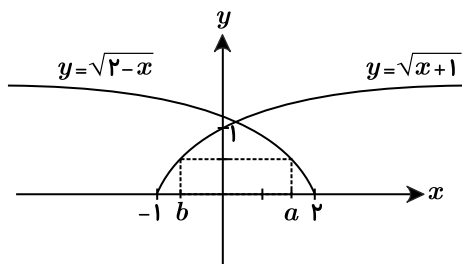
$$\Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$

۷۶ گزینه ۴ اگر دو رأس مستطیل روی محور x و رئوس دیگر روی منحنی در روبه‌رو باشد، داریم:

$$\sqrt{2-a} = \sqrt{1+|b|} \rightarrow b = a - 1$$

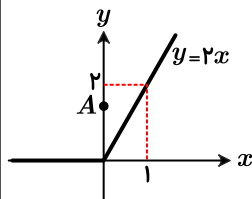
$$\Rightarrow S(a) = (2a - 1) \cdot \sqrt{2-a}, \quad S'(a) = 2\sqrt{2-a} - \frac{2a-1}{2\sqrt{2-a}} = 0$$

$$\Rightarrow 4(2-a) - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{-1}{2} \Rightarrow S(a) = \sqrt{2}$$



۷۷ گزینه ۳

$$y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{x=0} y = \sqrt{2} \Rightarrow A \Big|_{\sqrt{2}}^0$$



باید کمترین فاصله نقطه A را از تابع $y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ به دست آوریم که طبق شکل باید فاصله نقطه A را از خط

$y = 2x$ به دست آوریم که برابر است با:

$$d = \frac{|0 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = 0,2\sqrt{10}$$

۷۸ گزینه ۲ از تابع f ، مشتق می‌گیریم. تابع f' را در دامنه f یعنی $[0, +\infty)$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \xrightarrow{x \geq 0} f'(x) > 0$$

$D_f : x \geq 0$ و تابع در $x = 1$ دارای مجانب قائم است، پس نمی‌تواند در کل بازه $(1, +\infty) \cup (0, 1)$ صعودی باشد و گزینه ۱ نادرست است. در آخر

اینکه با توجه به نامنفی بودن x ، مشتق تابع همواره مثبت است.

x	0	1
y'	+	+
y	↗	↗

مجانب قائم

پس تابع در بازه‌های $(1, +\infty)$ و $(0, 1)$ صعودی است، ولی در اجتماع آنها صعودی نیست.

۷۹ گزینه ۱ تابع بر $x = 2$ دارای مجانب قائم است. تابع f' را حساب کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 8) - 3x^2(x^4)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3 - 8)^2} \xrightarrow{y'=0} x^6 - 32x^3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

x	0	2	$2\sqrt[3]{4}$
y'	+	-	-
y	↗	↘	↗

مجانب قائم

تابع در بازه‌های $(0, 2)$ و $(2, 2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است؛ بازه بزرگ‌تر $(0, 2)$ است که طول آن برابر با ۲ است.

۸۰ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} - x & x \leq 0 \end{cases}$$

وقتی $x \geq 0$ تابع f صعودی است. پس خود نیز اکیداً صعودی است. به ازای $x < 0$ باید نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم تا بازه‌ای را که تابع در آن صعودی است، بیابیم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0$$

پس تابع روی بازه $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

توجه: تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر اما پیوسته است؛ از آنجا که تابع در دو طرف این نقطه اکیداً صعودی است، یکنوایی تابع در این نقطه تغییر نمی‌کند، پس تابع روی $[-1, +\infty)$ صعودی است.

۸۱ گزینه ۳ تابع روی $R - \{\pm\sqrt{2}\}$ مشتق‌پذیر است. نامعادله $f'(x) \leq 0$ را حل می‌کنیم تا بازه‌هایی را که در آنها تابع اکیداً نزولی است بیابیم:

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ f'(x) & - & + & + & 0 & - & - & + \end{array} \quad f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 2) - 2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$= \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

چون $-2 < x < 2$ ، پس تابع در چهار بازه $[-\sqrt{3}, -2)$ ، $(-2, -1]$ ، $(-1, 0]$ و $[1, \sqrt{2})$ اکیداً نزولی است.

۸۲ گزینه ۴ روش اول:

$x = 4$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است (نقطه گوشه) بنابراین در $x = 4$ مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x) = \begin{cases} x(x - 4) & x \geq 4 \\ -x(x - 4) & x < 4 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ -2x + 4 & x < 4 \end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم $x = 2$ به دست می‌آید.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

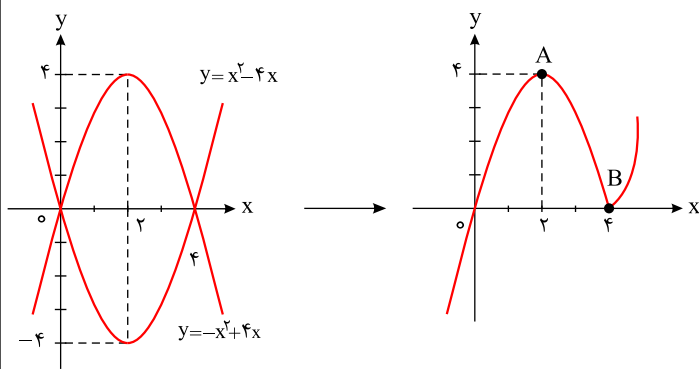
$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(2 - 4)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

$$x \geq 4 \rightarrow y = x^2 - 4x \rightarrow S \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix} \quad \text{محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها: } x = 0, 4 \quad \text{و} \quad x = 0, 4$$

$$x < 4 \rightarrow y = -x^2 + 4x \rightarrow S \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \text{محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها: } x = 0, 4 \quad \text{و} \quad x = 0, 4$$



$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۸۳ گزینه ۱ روش اول:

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x < 0 \rightarrow f(x) = -x^2 - 2x \rightarrow f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

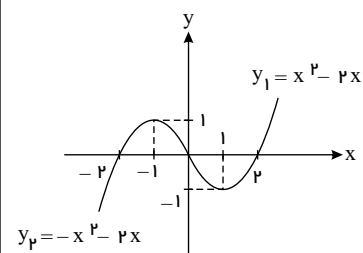
$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده‌شده را رسم کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow y = x^2 - 2x \rightarrow S \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, x = 0, 2: \text{ محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها}$$

$$x < 0 \rightarrow y = -x^2 - 2x \rightarrow S \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}, x = 0, -2: \text{ محل برخورد تابع با محور } x \text{ ها}$$



$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۸۴ گزینه ۱ توجه کنید دامنه تعریف تابع $[0, 4]$ است.

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} \rightarrow \frac{2x - 4}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} = 1$$

$$\rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \rightarrow 4x - x^2 = x^2 + 4 - 4x \rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & 0 & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & 4 \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline y & & \searrow & \nearrow & 2+2\sqrt{2} & \searrow & \end{array}$$

Max

$$\begin{cases} A \left| \begin{matrix} 2 + \sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{matrix} \right. \\ y = x \rightarrow x - y = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.

۸۵ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + 2x^2 + 2 - 2x^3 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & -\infty & 2-\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - \\ \hline y & & \searrow & \nearrow & \searrow & \end{array}$$

برای پیدا کردن عرض ماکسیمم، کافی است $2 + \sqrt{5}$ را در تابع قرار دهیم.

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{4\sqrt{5} + 10} = \frac{2(3\sqrt{5} + 5)}{2(2\sqrt{5} + 5)} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5} \times \frac{2\sqrt{5} - 5}{2\sqrt{5} - 5}$$

$$= \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{20 - 25} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \frac{-5(-1 + \sqrt{5})}{-5} = -1 + \sqrt{5}$$

۸۶ نکته: ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق به شرط آنکه عامل صفرشونده پشت آنها نباشد، زاویه دار (گوشه) هستند که مشتق پذیر نبود و جزء نقاط بحرانی و

اکسترمم نسبی به حساب می آیند. $x = -2$ و $x = 2$

این دو نقطه در واقع نقاط مرزی هستند که در تابع دو ضابطه‌ای یا همان قدر مطلق وجود دارند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\overbrace{x^4 - 4x^2}^{x^4 - 4x^2}}{x^2 - 1} & x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ \frac{\overbrace{-(x^4 - 4x^2)}^{-(x^4 - 4x^2)}}{x^2 - 1} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2} & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ \frac{-[(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)]}{(x^2 - 1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

ریشه‌های هر دو قسمت یکسان هستند پس یکی از ضابطه‌های f' را مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x - 2x^5 + 8x^3 = 0 \Rightarrow 2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(\underbrace{x^4 - 2x^2 + 4}_{\Delta < 0}) = 0 \Rightarrow x = 0$$

این ریشه برای ضابطه دوم f' قابل قبول است و نه ضابطه اول؛ پس در کل سه اکستریم نسبی داریم.

۸۷ گزینه ۳ برای پیدا کردن طول نقاط A و B ، مشتق تابع f را به دست آورده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

شیب خطی که از نقاط اکستریم نسبی تابع عبور می‌کند. $\xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه } f} \begin{cases} A(-1, 8) \\ B(2, -19) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = -9 \Rightarrow$

نقاط مدنظر باید دارای مشتق -9 باشند تا شیب خط مماس بر آنها موازی پاره خط AB باشد.

$$6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} 2 \text{ جواب دارد.}$$

یعنی ۲ نقطه یافت می‌شود.

۸۸ گزینه ۲ نقطه $A(0, 4)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ است، پس داریم:

$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$x = -\frac{2a}{3} \text{ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است که در این نقطه مقدار تابع نیز صفر است.}$$

$$f(-\frac{2a}{3}) = 0 \Rightarrow (-\frac{2a}{3})^3 + a(-\frac{2a}{3})^2 + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \Rightarrow a^3 = -27$$

$$a = -3 \Rightarrow \text{طول نقطه مینیمم نسبی } x = -\frac{2a}{3} = \frac{-2(-3)}{3} = 2$$

۸۹ گزینه ۱ در همسایگی $x = -1$ مقدار x منفی است و تابع را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x^3 |x| + 3ax^2 + b = x^3(-x) + 3ax^2 + b$$

$$y = -x^3 + 3ax^2 + b, \text{ اکستریم نسبی } A(-1, 1)$$

مشتق به ازای $x = -1$ برابر صفر است.

$$y' = -3x^2 + 6ax \xrightarrow{x=-1} -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + b$$

مختصات نقطه $A(-1, 1)$ در تابع صدق می کند.

$$1 = -(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + b \Rightarrow 1 = 1 - \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

۹۰ گزینه ۱ و $x = -2$ طول نقاط اکستریم نسبی تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ هستند، پس $x = 0$ و $x = -2$ ریشه های مشتق تابع هستند.

$$y' = 3x^2 + 2ax - 2b \Rightarrow \text{ریشه ها } \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$S = -2 + 0 = -\frac{2a}{3} \Rightarrow -6 = -2a \Rightarrow 9 = 3$$

$$P = -2 \times 0 = \frac{-2b}{3} \Rightarrow b = 0$$

$$y = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(0, -4) \\ x = -2 \Rightarrow -8 + 12 - 4 = 0 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

نقاط A و B نقاط اکستریم نسبی تابع هستند، پس فاصله A و B را می یابیم.

$$AB = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۹۱ گزینه ۲ نقطه $A(0, 0)$ اکستریم نسبی تابع است. پس مشتق در $x = 0$ برابر صفر است.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \xrightarrow{x=0} y' = 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

نقطه $A(0, 0)$ در تابع صدق می کند.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \xrightarrow[y=0]{x=0} 0 = 0 + 0 + 0 + d \Rightarrow d = 0$$

$$y = ax^3 + bx^2$$

نقطه $B(1, 1)$ نیز اکستریم نسبی تابع است، بنابراین داریم:

$$y = ax^3 + bx^2 \xrightarrow[y=1]{x=1} 1 = a + b \rightarrow a = 1 - b \quad (1)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{x=1} 3a + 2b = 0 \xrightarrow{(1)} 3(1-b) + 2b = 0 \Rightarrow 3 - 3b + 2b = 0$$

$$\Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(1)} a = 1 - 3 = -2$$

$$a \cdot b = -2 \times 3 = -6$$

۹۲ گزینه ۴ قطر کوچک یعنی $2b$ برابر ۶ است پس $b = 3$ است.

$$\begin{cases} F \\ F' \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = a^2 - 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۹۳ گزینه ۲ فاصله مرکز بیضی تا کانون بیضی برابر C است، پس:

$$F(-12, 0) \text{ کانون بیضی, } O(0, 0) \text{ مرکز بیضی}$$

$$C = OF = 12, 2b = 18 \Rightarrow b = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۹۴ گزینه ۴

راه حل اول:

$$F(0, 0), F'(a, 0)$$

$$FF' = |a| \Rightarrow 2c = |a| \Rightarrow c = \frac{|a|}{2} \quad (1)$$

$$AF + AF' = 2a' \Rightarrow \sqrt{0+1} + \sqrt{a^2+1} = 2a'$$

(توجه شود که طول قطر بزرگ بیضی را برابر $2a'$ فرض کرده ایم پس باید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی بیضی تا دو کانون برابر $2a'$ شود)

$$1 + \sqrt{a^2+1} = 2a' \Rightarrow a' = \frac{1 + \sqrt{a^2+1}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e = \frac{c}{a'} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{|a|}{2}}{\frac{1 + \sqrt{a^2+1}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{|a|}{1 + \sqrt{a^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{5}|a| = 2 + 2\sqrt{a^2+1} \Rightarrow \sqrt{5}|a| - 2 = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 4 - 4\sqrt{5}|a| = 4a^2 + 4 \Rightarrow a^2 - 4\sqrt{5}|a| = 0$$

$$|a|^2 - 4\sqrt{5}|a| = 0 \Rightarrow |a|(|a| - 4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |a| = 0 \Rightarrow a = 0 & \text{غلق} \\ |a| - 4\sqrt{5} = 0 \Rightarrow |a| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{5} \end{cases}$$

راه حل دوم:

با توجه به اینکه کانون F دارای مختصات $F(0, 0)$ است و $A(0, -1)$ یک نقطه روی بیضی است؛ پس AF نصف طول وتر کانونی بیضی است پس داریم:

$$\frac{b^2}{a'} = 1 \Rightarrow b^2 = a'$$

توجه شود که نصف طول قطر بزرگ بیضی را برابر a' فرض کرده‌ایم از طرفی می‌دانیم خروج از مرکز بیضی به صورت زیر قابل محاسبه است:

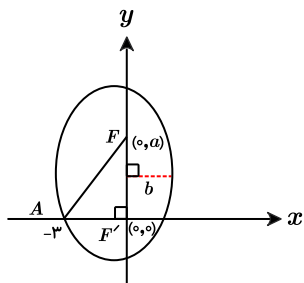
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a'^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{a'}{a'^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a'} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow a' = 5 \Rightarrow c^2 = a'^2 - b^2 = 25 - 5 = 20$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{5}$$

$$FF' = 4\sqrt{5} \Rightarrow |a| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{5}$$

۹۵ گزینه ۲



$$FF' = a, AF = \sqrt{a^2 + 9}, AF' = 3$$

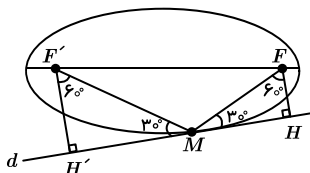
$$\text{قطر بزرگ} = AF + AF' \rightarrow \text{قطر بزرگ} = 3 + \sqrt{9 + a^2}, \frac{a}{3 + \sqrt{9 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = 3 + \sqrt{9 + a^2} \Rightarrow 2a^2 - 6a\sqrt{2} + 9 = 9 + a^2$$

$$\Rightarrow a(a - 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (2b)^2 = (3 + \sqrt{9 + 72})^2 - 72 = 72 \Rightarrow 2b = 6\sqrt{2}$$

۹۶ گزینه ۳



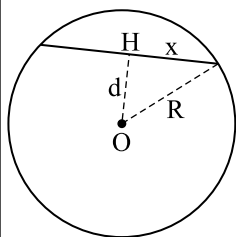
$$\widehat{M_2} = \widehat{M_1} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{فرض: } HH' = 2\sqrt{3} \Rightarrow MH' + MH = 2\sqrt{3} \Rightarrow MF' \cos 30^\circ + MF \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$(MF' + MF) \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \Rightarrow (\text{طول قطر بزرگ}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر بزرگ} = 4$$

۹۷ گزینه ۲



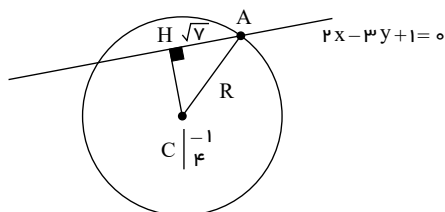
جایگذاری
 $(-1, 2, 5) \Rightarrow 2 + 2(2, 5)^2 + 6 - 10(2, 5) + 1 < 0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره است.

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow O\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$OH = \frac{5}{2}, \quad R = 2\sqrt{2}$$

$$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow 8 = x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \text{طول وتر} = 2x = \sqrt{7}$$

۹۸ گزینه ۱ در ابتدا باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده را به دست آوریم.



$$\Rightarrow CH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\triangle ACH : R^2 = (AH)^2 + (CH)^2 \rightarrow R^2 = 7 + 13 = 20 \rightarrow R = 2\sqrt{5}$$

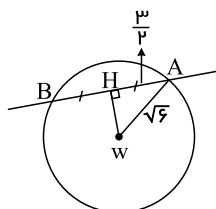
پس: $\begin{cases} C \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ R = 2\sqrt{5} \end{vmatrix} : \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \\ \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20$

$$\rightarrow (x+1)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \rightarrow x = 3 \\ x+1 = -4 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۹۹ گزینه ۴ ابتدا مشخصات دایره را از روی معادله آن می یابیم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره} : W(2, -1) \\ \text{شعاع دایره} : R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \end{cases}$$



عمود وارده از مرکز دایره بر وتر AB، آن وتر را نیز نصف می کند. طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه AWH داریم:

$$(\sqrt{6})^2 = HW^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow WH = \sqrt{6 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} (*)$$

از طرفی فاصله مرکز دایره از وتر AB (خط $2y + x - a = 0$ برابر است با:

$$WH = \frac{|2(-1) + 2 - a|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} \frac{|a|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |a| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_2 - a_1 = 5\sqrt{3}$$

۱۰۰ گزینه ۴ جایگذاری نقطه $(0, 3)$ در معادله دایره نتیجه می‌دهد:

$$C = 9 + 3a$$

با جایگذاری $3 + \frac{2}{3}y$ (معادله خط) در معادله دایره داریم:

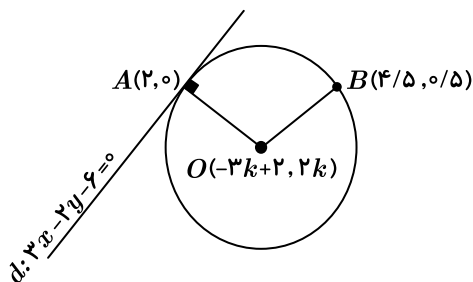
$$x^2 + \left(-\frac{2}{3}x + 3\right)^2 + 3x + a\left(-\frac{2}{3}x + 3\right) = 9 + 3a$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}x^2 - x\left(1 + \frac{2}{3}a\right) = 0$$

چون معادله بالا باید ریشه مضاعف داشته باشد (چون خط بر دایره مماس است) لذا باید:

$$1 + \frac{2}{3}a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -1,5$$

۱۰۱ گزینه ۴



$$d: 3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 3x - 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow m_d = \frac{3}{2}$$

$$m_{OA} = -\frac{1}{m_d} = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$OA \text{ معادله خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

مرکز دایره به مختصات $O = (x_0, y_0)$ روی خط OA قرار دارد. بنابراین مختصات آن در معادله خط OA صدق می‌کند. اگرچه می‌توانیم مختصات مرکز

دایره را به صورت $O = (k, -\frac{2}{3}(k - 2))$ فرض کنیم، ولی به جهت ساده‌سازی محاسبات آن را به فرم $O = (-3k + 2, 2k)$ در نظر می‌گیریم و

داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(-3k + 2 - 2)^2 + (2k - 0)^2} = \sqrt{(-3k + 2 - 4/5)^2 + (2k - 0/5)^2}$$

$$\Rightarrow (-3k)^2 + (2k)^2 = (-3k - 2/5)^2 + (2k - 0/5)^2$$

$$\Rightarrow 9k^2 + 4k^2 = 9k^2 + 15k + 6/25 + 4k^2 - 2k + 0/25 \Rightarrow 13k = -6/5$$

$$\Rightarrow k = -0/5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3k + 2 = -3(-0/5) + 2 = 3/5 \\ y_0 = 2k = 2(-0/5) = -1 \end{cases}$$

۱۰۲ گزینه ۱ برای نوشتن معادله وتر مشترک دو دایره متقاطع، کافی است معادله‌های دو دایره را در یک دستگاه حل کنیم. برای سادگی محاسبات حتماً ضرایب x^2 و

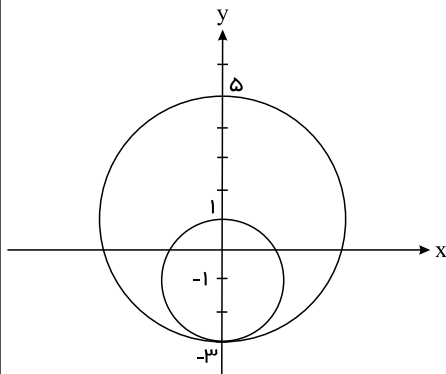
y^2 در هر دو معادله باید یکسان باشند:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ x^2 + y^2 + 2y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

۱۰۳ گزینه ۱ مرکز و شعاع دایره مفروض را از روی معادله ضمنی آن به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2y = 3 \Rightarrow \begin{cases} O(0, -1) \\ R = \frac{\sqrt{4+12}}{2} = 2 \end{cases}$$

پس شعاع دایره خواسته شده باید ۴ باشد یعنی $R' = 4$ ؛ اطلاعات داده شده را در صفحه مختصات ترسیم می کنیم:



با توجه به شکل، مرکز و شعاع دایره مورد نظر $O'(0, 1)$ ، $R' = 4$ است و در نتیجه:

$$C': x^2 + (y - 1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 15$$

۱۰۴ گزینه ۲

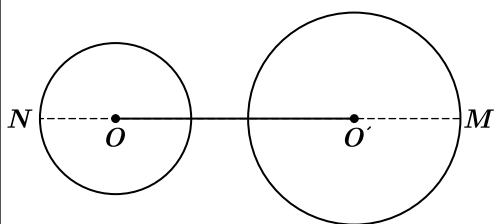
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \rightarrow O(2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \rightarrow O'(0, 1), R' = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 - 4(-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} (|R - R'| < OO' < R + R')$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم متقاطع است.

۱۰۵ گزینه ۲



$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1, -1) \\ r' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 4a} = \sqrt{2+a} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} O'(-2, 3) \\ r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 24a} = \sqrt{13-6a} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$MN = \sqrt{2+a} + \sqrt{13-6a} + 5 = 8 \rightarrow a = 2$$

۱۰۶ گزینه ۳ فضای نمونه این سؤال $n(S) = 8!$ است.

$$\boxed{\text{کتاب فارسی}} \rightarrow n(A) = \underbrace{2!}_{\substack{\text{جایگشت} \\ \text{دو بسته}}} \times \underbrace{5!}_{\substack{\text{جایگشت کتاب های} \\ \text{فارسی}}} \times \underbrace{3!}_{\substack{\text{جایگشت کتاب های} \\ \text{زبان}}}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{2! \times 5! \times 3!}{8!} = \frac{1}{28} \text{ است.}$$

۱۰۷ گزینه ۳ فضای نمونه آزمایش ۱۰! است. $n(S)$

— ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ — ○ —

دو فرد موردنظر در ۹ جایی که مشخص شده است می توانند قرار بگیرند.

جابه جایی دو فرد موردنظر

$$n(A) = \binom{9}{2} \times \underbrace{2!}_{\downarrow} \times \underbrace{8!}_{\uparrow}$$

جابه جایی هشت نفر دیگر

$$\text{پس } P(A) = \frac{\binom{9}{2} \times 2! \times 8!}{10!} = \frac{4}{5} \text{ است.}$$

۱۰۸ گزینه ۴ اعداد حاصل می توانند یک رقمی تا پنج رقمی باشند البته بدون تکرار.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۵ : اعداد یک رقمی} \\ \text{دورقمی : } \binom{5}{2} \times 2! = 20 \\ \text{سه رقمی : } \binom{5}{3} \times 3! = 60 \\ \text{چهار رقمی : } \binom{5}{4} \times 4! = 120 \\ \text{پنج رقمی : } \binom{5}{5} \times 5! = 120 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} n(S) = \text{حالت } 325$$

می دانیم عددی به ۴ پخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن مضرب ۴ باشند. با ارقام داده شده و بدون تکرار ارقام اعدادی قابل قبول هستند که دو رقم سمت

راست آنها به ۵۲ و ۳۲ و ۲۴ و ۱۲ ختم می شود. در اعداد تک رقمی نیز فقط عدد چهار قابل قبول است.

به ازای هر کدام از ۲ رقم قابل قبول صدگان ۳ حالت خواهد داشت.

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت ۱} \rightarrow \text{تک رقمی} \\ \text{حالت ۴} \rightarrow \text{دورقمی } (12, 24, 32, 52) \\ \text{حالت ۴} \rightarrow \text{سه رقمی } \begin{array}{c} \boxed{- \times -} \\ \text{۴} \end{array} = 12 \\ \text{حالت ۴} \rightarrow \text{چهار رقمی } \begin{array}{c} \boxed{- \times -} \\ \text{۴} \end{array} = 24 \\ \text{حالت ۴} \rightarrow \text{پنج رقمی } \begin{array}{c} \boxed{- \times -} \\ \text{۴} \end{array} = 24 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} n(A) = \text{حالت } 65 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

۱۰۹ گزینه ۴ فضای نمونه ای تمام اعداد یک رقمی، دورقمی، سه رقمی، چهار رقمی و پنج رقمی که می توان با ارقام ۱ تا ۵ نوشته است:

$$n(S) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک رقمی}} + \underbrace{\binom{5}{2} \times 2!}_{\text{دورقمی}} + \underbrace{\binom{5}{3} \times 3!}_{\text{سه رقمی}} + \underbrace{\binom{5}{4} \times 4!}_{\text{چهار رقمی}} + \underbrace{\binom{5}{5} \times 5!}_{\text{پنج رقمی}}$$

$$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$$

عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد.

یک عدد $\rightarrow 3$: یک رقمی

$$\text{دورقمی: } \begin{cases} 12 \\ 15 \\ 24 \\ 54 \end{cases} \rightarrow 4 \times 2! = 8 \rightarrow \text{عدد } 8$$

$$\text{سه رقمی: } \begin{cases} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 5 \\ 2, 3, 4 \\ 3, 4, 5 \end{cases} \rightarrow 4 \times 3! = 24 \rightarrow \text{عدد } 24$$

$$\text{چهار رقمی: } 1, 2, 4, 5 \rightarrow 4! = 24 \rightarrow \text{عدد } 24$$

$$\text{پنج رقمی: } 1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow 5! = 120 \rightarrow \text{عدد } 120$$

$$\text{یعنی: } n(A) = 1 + 8 + 24 + 24 + 120 = 177$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{177}{325} \text{ است.}$$

۱۱۰ گزینه ۳ بدون توجه به اعداد اول و دوم، اینکه عدد سوم ۱ باشد برابر $\frac{1}{n}$ است که طبق فرض:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

در میان اعداد ۱ تا ۱۵، پنج عدد مضرب ۳ و ده عدد غیر مضرب ۳ داریم. لذا در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان این اعداد، احتمال اینکه فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$P = \underbrace{\frac{10}{15} \times \frac{19}{14}}_{\text{غیر مضرب ۳}} \times \underbrace{\frac{5}{13}}_{\text{مضرب ۳}} = \frac{15}{91}$$

۱۱۱ گزینه ۲

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} &= \binom{k}{k+5} \binom{n}{k} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!} \Rightarrow \frac{n}{k+5} = 1 \Rightarrow n = k+5 \\ k=2 &\Rightarrow n=7 \Rightarrow n+k=9 \end{aligned}$$

۱۱۲ گزینه ۳ اگر بخواهیم در پرتاب m آم، m آمین «رو» ظاهر شود، باید در $n-1$ پرتاب قبل، $m-1$ «رو» ظاهر شود. با توجه به فرض داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n} &= \frac{m}{m+3} \times \frac{\binom{n}{m}}{2^n} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times (n-m+1)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{(m)! \times (n-m)!} \\ &\Rightarrow 1 = \frac{m}{m+3} \times \frac{n}{m} \Rightarrow n = m+3 \rightarrow n \times m = ? \rightarrow (m+3) \times m = ? \Rightarrow m^2 + 3m = ? \xrightarrow{m=5} 40 \end{aligned}$$

۱۱۳ گزینه ۲ حالات متوالی عبارت‌اند از:

$$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

و حالات برابر عبارتند از:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

که جمعاً ۱۶ حالت می‌شود. لذا جواب با استفاده از اصل متمم برابر است با:

$$1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۱۱۴ گزینه ۴ چون می‌خواهیم یکی از اعداد ظاهر شده، بزرگ‌تر از دیگری باشد پس باید تاس‌ها باهم مساوی نباشند و بنابراین داریم:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$n(A) = 36 - 6 = 30 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

توجه شود که در حالات $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ تاس‌ها باهم برابرند ولی در سایر حالات تاس‌ها نابرابر بوده و یکی از دیگری بزرگ‌تر است.

۱۱۵ گزینه ۴ کافی است احتمال متممیز بودن اعداد ظاهر شده در دو تاس را حساب کنیم.

$$\frac{5 \times 6}{6^2} = \frac{5}{6}$$

۱۱۶ گزینه ۱

$$\rightarrow \text{تعداد مطلوب} = \binom{7}{2} = 21 \text{ یکی از کارت‌ها ۱ بوده و دوتای دیگر دلخواه باشند.}$$

$$\rightarrow \text{تعداد مطلوب} = \binom{3}{2} = 3 \text{ یکی از کارت‌ها ۲ بوده و دوتای دیگر زوج باشند.}$$

$$p(\text{مطلوب}) = \frac{21 + 3}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۱۱۷ گزینه ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های سبز x باشد.

$$p(\text{مطلوب}) = 1 - \frac{\binom{x}{2}}{\binom{5+x}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(5+x)(4+x)}{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6x^2 - 6x = x^2 + 9x + 20$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 15x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ غرق}$$

$$1 = \text{اختلاف تعداد مهره‌ها} \Rightarrow \text{تعداد مهره‌های سبز} = 4$$

۱۱۸ گزینه ۲ حالت‌بندی را براساس عدد کوچک‌تر انجام می‌دهیم:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \binom{8}{2} = 28$$

۷ حالت $\rightarrow \{2, 3, \dots, 8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{1\}$ عدد کوچکتر باشد

۳ حالت $\rightarrow \{4, 6, 8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{2\}$ عدد کوچکتر باشد

۱ حالت $\rightarrow \{6\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{3\}$ عدد کوچکتر باشد

۱ حالت $\rightarrow \{8\} \in$ عدد بزرگتر $\rightarrow$ حالتی که $\{4\}$ عدد کوچکتر باشد

اکنون توجه می‌کنیم که:

$$4 \leq \text{عدد کوچکتر} \rightarrow \frac{\text{عدد بزرگتر} \geq 8}{2} \times \text{عدد کوچکتر} \geq \text{عدد بزرگتر} \Rightarrow \text{دو عدد متمایز اند}$$

بنابراین همه حالت‌ها را بررسی کرده‌ایم و طبق اصل جمع داریم:

$$n(A) = 7 + 3 + 1 + 1 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

۱۱۹ گزینه ۳ تعداد مهره‌های دسته کمتر را با n و تعداد مهره‌های دسته بیشتر را با $2n$ نمایش می‌دهیم. بنابراین:

تعداد کل حالت‌های انتخاب ۲ مهره از کیسه برابر است با:

$$n(S) = \binom{3n}{2}$$

طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های انتخاب ۲ مهره غیرهم‌رنگ برابر است با:

$$n(A) = \binom{n}{1} \binom{2n}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض مسئله}} \frac{n \times 2n}{\frac{(3n)(3n-1)}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4n^2}{9n^2 - 3n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n^2 - 3n = 0$$

$$\Rightarrow n(n - 3) = 0 \xrightarrow{n > 0} n = 3 \Rightarrow 3n = 9$$

۱۲۰ گزینه ۱ $P(A)$, $P(B)$ و $P(B|A)$ را به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = 0.7 : \text{احتمال موفقیت فرد در آزمون اول}$$

$$P(B) = 0.6 : \text{احتمال موفقیت فرد در آزمون دوم}$$

$$P(B|A) = 0.8 : \text{احتمال موفقیت فرد در آزمون دوم به شرط موفقیت در آزمون اول}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{0.7} \rightarrow P(A \cap B) = 0.56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.56 = 0.74$$

۱۲۱ گزینه ۲ روش اول: پیشامد موردنظر را به صورت «اولی سفید و دو مهره بعد هم سفید» یا «اولی سیاه و دو مهره بعدی سفید» تعریف می‌کنیم:

$$P(\text{مهره اول سیاه و دو مهره بعدی سفید}) + P(\text{مهره اول سفید و دو مهره بعدی سفید}) = P(\text{دو مهره اخیر سفید})$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{6}{11} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$$

$$= \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} = \frac{6}{45} \left(\frac{5}{11} + \frac{10}{11} \right) = \frac{6}{45} \times \frac{15}{11} = \frac{2}{11}$$

روش دوم:

وقتی مهرهای را خارج می‌کنیم و آن را مشاهده نمی‌کنیم، انگار اصلاً مهره خارج نکرده‌ایم، پس:

$$P(\text{هر دو سفید}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

۱۲۲ گزینه ۳

پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

قبولی در آزمون اول: A

قبولی در آزمون وم: B

$$P(A) = 0.9, \quad P(B) = 0.9, \quad P(A \cap B) = 0.85$$

مطلوب مسئله $P(A|B)$ است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{85}{90} = \frac{5 \times 17}{5 \times 18} = \frac{17}{18}$$

۱۲۳ گزینه ۴ A, B را پیشامد متولد شدن خرگوش نر در دوره اول و دوم بارداری در نظر می‌گیریم.

$$\text{احتمال متولد شدن یک خرگوش نر: } P(A) = P(B) = \frac{70}{100}$$

$$\text{احتمال متولد شدن دو خرگوش نر: } P(A \cap B) = \frac{60}{100}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{6}{7}$$

۱۲۴ گزینه ۴ احتمال بیماری را $P(A)$ و احتمال بهبود یافتن را $P(B)$ در نظر می‌گیریم. طبق مفروضات سؤال داریم:

$$P(A) = 0.08, \quad P(B|A) = 0.5$$

خواسته سوال $P(A \cap B)$ است.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.5 \Rightarrow \frac{p(A \cap B)}{0.08} = 0.5$$

$$P(A \cap B) = 0.08 \times 0.5 = 0.04 \xrightarrow{\text{درصد}} 0.04 \times 100 = 4$$

۱۲۵ گزینه ۳ طبق فرض، پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} A : \text{بدون رقیب اصلی} \\ B : \text{کسب مدال طلا} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فرض}} \left\{ \begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{5} \\ P(B) = \frac{1}{3} \\ P(B|A) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

خواسته سؤال، احتمال $A \cup B$ است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{6 + 10 - 3}{30} = \frac{13}{30}$$

۱۲۶ گزینه ۴

$$p = 0,4 \times 0,25 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,35 = 29,25$$

۱۲۷ گزینه ۱

$$P = \frac{45}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{2450}{10000} \rightarrow 0,245$$

۱۲۸ گزینه ۱

$$\begin{array}{ccc} \text{آبی از A} & \text{سبز از A} & \text{قرمز از A} \\ \left(\frac{6}{15} \right) \times \left(\frac{6}{15} \right) & + \left(\frac{4}{15} \right) \times \left(\frac{5}{15} \right) & + \left(\frac{5}{15} \right) \times \left(\frac{5}{15} \right) = \frac{81}{225} = \frac{9}{25} = 0,36 \end{array}$$

آبی از B آبی از B آبی از B

۱۲۹ گزینه ۲ پیشامد قبولی نیلوفر را A و پیشامد قبولی دوستش را B در نظر می گیریم:

$$\text{فرض: } P(A) = \frac{2}{3}P(B)$$

$$\text{فقط قبولی دوستش: } P(B - A) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow[B, A \text{ مستقل اند}]{P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{8}} \Rightarrow P(B)(1 - P(A)) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow P(B)(1 - \frac{2}{3}P(B)) = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{2}{3}(P(B))^2 - P(B) + \frac{3}{8} = 0$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{2}{3})(\frac{3}{8})}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[B', A' \text{ مستقل اند}]{P(A' \cap B') = P(A')P(B')} = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

۱۳۰ گزینه ۴ اگر احتمال موفقیت فرد A را x در نظر بگیریم احتمال موفقیت دوست او برابر $\frac{x}{2}$ است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow \frac{7}{9} = x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\times 18} 14 = 18x + 9x - 9x^2$$

$$\rightarrow 9x^2 - 27x + 14 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 729 - 504 = 225} \begin{cases} x = \frac{27 + 15}{18} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3} \text{ غقی} \\ x = \frac{27 - 15}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ قق} \end{cases}$$

پس $P(A) = x = \frac{2}{3}$ است.

۱۳۱ گزینه ۱ فرض کنید پیشامدهای اصابت تیرهای علی و حسن به هدف را به ترتیب با A و B نمایش دهیم. با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.6 + 0.4 - 0.6 \times 0.4 = 0.76$$

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6}{0.76} = \frac{15}{19}$$

۱۳۲ گزینه ۱ اگر احتمال کسب مدال توسط ورزشکاران را $p(A)$, $p(B)$ بنامیم خواهیم داشت:

$$p(A) = 0.6, \quad p(B) = 0.4$$

احتمال اینکه فقط یکی از دو ورزشکار مدال کسب کند برابر است با:

$$\begin{aligned} p(\text{مطلوب}) &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A)P(B') + P(B)P(A') \\ &= (0.6)(0.6) + (0.4)(0.4) = 0.36 + 0.16 = 0.52 \end{aligned}$$

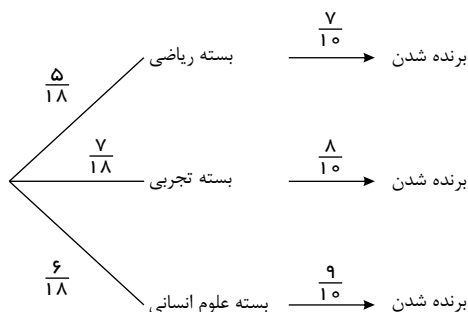
توجه شود که چون A و B مستقل اند پس A' و B و همچنین A و B' نیز مستقل هستند.

۱۳۳ گزینه ۳

احتمال برنده شدن دو تیم مستقل از یکدیگر است.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) - P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A)P(B) \\ &= 0.8 + 0.3 - 2 \times 0.8 \times 0.3 = 0.62 \end{aligned}$$

۱۳۴ گزینه ۲ در کل ۱۸ بسته وجود دارد.



$$\text{احتمال مطلوب} = \left(\frac{5}{18} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{18} \times \frac{8}{10}\right) + \left(\frac{6}{18} \times \frac{9}{10}\right) = \frac{35 + 56 + 54}{180} = \frac{145}{180} = \frac{29}{36}$$

۱۳۵ گزینه ۴ از نمودار درختی استفاده می‌کنیم.

پرتاب ۱ سکه $\rightarrow$ هر دو رو $\xrightarrow{\frac{1}{4}}$ در این حالت دقیقاً دو سکه «پشت» غیر ممکن است.
 سکه ۲ $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{4}} \text{احتمال رو} \Rightarrow \text{پرتاب ۱ سکه} \rightarrow \text{هر دو پشت} \\ \text{در این حالت ۱ سکه‌ای که در مرحله دوم پرتاب می‌کنیم، باید رو بیاید.} \\ \xrightarrow{\frac{2}{4}} \text{۲ سکه متفاوت} \rightarrow \text{پرتاب ۲ سکه} \rightarrow \text{۲ سکه متفاوت} \\ \text{در این حالت ۲ سکه مرحله دوم نیز باید متفاوت ظاهر شوند.} \end{array} \right.$

$$P = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

۱۳۶ گزینه ۱ احتمال قرمز بودن مهره انتخابی، طبق فرمول احتمال کل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(\text{قرمز}) = P(\text{ظرف اول} | \text{قرمز}) \times P(\text{ظرف اول}) + \dots + P(\text{ظرف سوم} | \text{قرمز}) \times P(\text{ظرف سوم})$$

$$= \frac{16}{45} \times \frac{4}{16} + \frac{15}{45} \times \frac{6}{15} + \frac{14}{45} \times \frac{5}{14} = \frac{4+6+5}{45} = \frac{1}{3}$$

۱۳۷ با توجه به اینکه سکه را ۳ بار پرتاب کرده‌ایم، حداکثر ۳ بار ممکن است رو بیاید؛ پس عدد روی تاس قطعاً (۱) است. احتمال این رخداد برابر است با گزینه ۳

این که تاس عدد (۱) و سکه هر ۳ بار «رو» آمده باشد:

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{آمدن تاس}} \times \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{رو آمدن یک سکه}} \right)^3 = \frac{1}{48}$$